

В. А. ГОРЕВ, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры комплексной безопасности в строительстве, Московский государственный строительный университет (Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, 26; e-mail: kafedrapb@yandex.ru)

М. В. ФОМИНА, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры физики, Московский государственный строительный университет (Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, 26)

УДК 624.012

УПРОЩЕННЫЙ РАСЧЕТ ТЕПЛООБМЕНА НА ПЛОСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Для определения температуры поверхности тела и теплового потока, идущего внутрь его, явным образом использованы величины, заданные в виде начальных и граничных условий, а также данные об источнике тепла и тепловых характеристиках приемника тепла. Представлены решения, охватывающие отдельно случаи термически тонкого тела, когда критерий Био $Bi < 0,14$; случай термически толстого тела, когда число Фурье $Fo < 0,5$. Рассмотрен общий случай $Bi > 0,14$ для нескольких диапазонов числа Bi .

Ключевые слова: пластина; теплопроводность; число Био Bi ; число Фурье Fo ; время прогрева пластины; время прогрева поверхности.

DOI: 10.18322/PVB.2016.25.03.5-14

Введение

При изучении многих процессов, связанных с теплообменом на границе *среда – конструкция*, необходимо знать, как изменяется температура поверхности конструкции. Это позволит облегчить определение температуры нагрева или охлаждения конструкции, скорости кипения жидкости на горячей поверхности, а также оценить время достижения критических условий воспламенения на поверхности. При построении физических моделей, в которых используются сведения о температуре поверхности конструкции и величине теплового потока на ее границах, полезно иметь обозримые аналитические выражения для указанных величин [1].

Существующие решения уравнения теплопроводности для пластин и полубесконечного пространства громоздки и труднообозримы, так как выражаются через бесконечный ряд или табулированные спецфункции [2–4].

В предлагаемой работе предпринята попытка получить в конечных выражениях изменение температуры поверхности и величины теплового потока для случая одномерного распространения тепла в пластине и в полубесконечном пространстве.

1. Случай термически тонкого тела

Рассмотрим задачу о прогреве (охлаждении) бесконечной пластины толщиной δ , на границах которой происходит теплообмен по закону:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \alpha(T_c - T_n) \text{ при } x=0; \\ q_2 &= 0 \text{ при } x=\delta \text{ (поверхность} \\ &\quad \text{теплоизолирована),} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где α — коэффициент теплоотдачи со стороны среды; T_c, T_n — температура соответственно среды и обогреваемой поверхности пластины.

Одномерное уравнение теплопроводности через пластину с граничными условиями (1) и начальным условием $T_{(x, 0)} = T_0$ имеет вид:

$$C_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (2)$$

где C_p, ρ, λ — удельная теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности материала конструкции соответственно.

После интегрирования по толщине пластины уравнения (2) с учетом граничных условий (1) получаем:

$$C_p \rho \delta \frac{\partial \bar{T}(t)}{\partial t} = \alpha(T_c - T_n), \quad (3)$$

где δ — толщина пластины;

$\bar{T}(t)$ — средняя температура пластины;

$$\bar{T}(t) = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} T(x, t) dx.$$

Данные о теплофизических характеристиках сред и материалов представлены, например, в [5–8].

Для твердых тел плотность практически не зависит от температуры. Теплоемкость C_p для чистых элементов и простых веществ с изотропными свой-

ствами слабо зависит от температуры, если последняя превышает дебаевскую [9]. Правило Дюлонга – Пти дает значение $C_p = 25000/\mu$ (где μ — молярная масса).

Коэффициент теплоотдачи α зависит от свойств среды и характера ее движения со стороны теплопровода. Эта зависимость определяется через критерий Нуссельта:

$$\alpha = Nu \lambda_c / l_x,$$

где Nu — число Нуссельта; часто представляется в виде: $Nu = C Re^m Pr^n$ или $Nu = C_1 Gr^m Pr^n$;

C, C_1, m, n — константы, зависящие от режима движения среды (соответственно ламинарный, переходный, турбулентный);

Re — число Рейнольдса;

Pr — число Прандтля;

Gr — критерий Грассхофа, используемый при естественной конвекции;

λ_c — коэффициент теплопроводности среды;

l_x — характерный размер поверхности теплообмена в направлении движения среды.

Свойства среды представлены коэффициентом теплопроводности, вязкостью и теплоемкостью. Эти величины входят в определение чисел Прандтля, Рейнольдса и Грассхофа:

$$Pr = \mu_c C_{pc} / \lambda_c;$$

$$Re = Ul_x \rho_c / \mu_c;$$

$$Gr = \frac{\beta_c l_x^3 g (T_c - T_n)}{v_c^3},$$

где μ_c — динамическая вязкость среды;

C_{pc} — удельная теплоемкость среды;

U — характерная скорость среды;

ρ_c — плотность среды;

β_c — коэффициент объемного расширения;

g — ускорение свободного падения;

v_c — кинематическая вязкость среды; $v_c = \mu_c / \rho_c$.

Для газов $Pr \sim 1$, в частности для воздуха $Pr = 0,74$.

Более подробно об определении коэффициентов теплоотдачи изложено в [10–13]. Часто конвективный теплообмен идет одновременно с лучистым теплообменом. Например, при потере тепла телом путем совместного действия излучения и конвекции тепловой поток q представляют в виде:

$$q = \alpha_\Sigma (T_n - T_c),$$

где α_Σ — суммарный коэффициент теплоотдачи;

$\alpha_\Sigma = \alpha_{изл} + \alpha_{конв}$;

$\alpha_{изл}, \alpha_{конв}$ — коэффициенты теплоотдачи соответственно излучением и конвекцией.

Более подробно вопрос об определении $\alpha_{изл}$ освещен в специальной литературе [14–16].

Из уравнения (2) следует, что характерное время распространения тепловой волны по толщине пластины

$$t_1 = \frac{\delta^2 C_p \rho}{\lambda} = \frac{\delta^2}{\varkappa},$$

где \varkappa — коэффициент температуропроводности материала конструкции (пластины).

Из уравнения (3) вытекает характерное время прогрева t_2 всей пластины под внешним воздействием:

$$t_2 = C_p \rho \delta / \alpha.$$

Связь между временем распространения тепла t_1 по толщине пластины и временем прогрева t_2 (изменение средней температуры во времени) имеет вид:

$$t_1 = t_2 Bi,$$

где Bi — число Био; $Bi = \alpha \delta / \lambda$.

При условии $Bi = t_1 / t_2 \ll 1$ реализуется случай термически тонкого тела, когда температура по толщине пластины выравнивается по мере ее постепенного прогрева. В этом случае можно считать, что $\bar{T} = T_{n1} = T_{n2}$, и уравнение (3) приводится к виду:

$$t_2 \frac{d\bar{T}}{dt} = (T_{c(t)} - \bar{T}(t)), \quad (4)$$

которое является линейным, а следовательно, даже при зависящей от времени температуры среды

$$\bar{T}(t) = T_0 e^{-t/t_2} + \frac{1}{t_2} \int_0^t T_{c(t)} e^{-(t-\tau)/t_2} d\tau, \quad (5)$$

где T_0 — начальная температура термически тонкого тела;

τ — переменная интегрирования от 0 до t .

При изучении термически тонких тел, кроме условия $Bi \ll 1$, необходимо иметь в виду, что время изучения процесса t должно удовлетворять условию $t/t_1 > 1$, т. е. тепловая волна должна, по крайней мере, пройти через толщину пластины. Это условие можно выразить так: $Fo = \varkappa t / \delta^2 > 1$, где Fo — число Фурье.

Пример

Термически тонкое тело с одной стороны изолировано, а с другой — температура среды изменяется по закону $T_c = T_0 e^{t/t_c}$ (где t_c — характерное время изменения температуры среды в помещении на начальной стадии пожара при постоянной площади пожара) [17].

Подставив в (4) $t_2 = C_p \rho \delta / \alpha$ и $T_c = T_0 e^{t/t_c}$, получим выражение изменения температуры термически тонкого тела:

$$\bar{T}(t) = \frac{T_0}{1 + \frac{t_2}{t_c}} \left[e^{t/t_c} + \frac{t_2}{t_c} e^{-t/t_2} \right].$$

В случае если в предыдущем примере температура среды T_c — величина постоянная, решение имеет вид:

$$\frac{\bar{T}(t) - T_0}{T_c - T_0} = 1 - e^{-t/t_2}. \quad (6)$$

При определенных условиях температура тела может достичь таких значений, что возникает необходимость учитывать излучение тела наружу. В случае если на тело падает постоянный поток $q_{\text{п}}$, он может иметь конвективную или радиационную природу, а потери тепла в окружающую среду обуславливаются совместным действием конвекции и излучения с суммарным коэффициентом теплоотдачи α_{Σ} . Тогда температура тонкого тела будет определяться выражением

$$\bar{T}(t) - T_0 = \frac{q_{\text{п}}}{\alpha_{\Sigma}} (1 - e^{-t/t_2}), \quad (7)$$

где $t_2 = C_p \rho \delta / \alpha_{\Sigma}$.

Пример

Горячий неизлучающий газ с температурой $T_c = \text{const}$ обменивается теплом с термически тонким телом, имеющим начальную температуру T_0 . По мере нагревания тела его температура поднимается до значений, при которых необходимо учитывать потерю тепла излучением в окружающее пространство. Причем окружающая среда пропускает излучение, не поглощая его. Тело излучает по закону $q_{\text{п}} = \varepsilon \sigma \times (\bar{T}^4 - T_0^4)$ (где ε — степень черноты поверхности конструкции; σ — постоянная Стефана). Теплообмен между средой и телом характеризуется коэффициентом теплоотдачи α_1 .

Уравнение (3) в данном случае будет иметь вид:

$$C_p \rho \delta \frac{d\bar{T}}{dt} = \alpha_1 (T_c - \bar{T}) - \varepsilon \sigma (\bar{T}^4 - T_0^4).$$

Из-за четвертой степени \bar{T}^4 уравнение интегрируется не просто, поэтому прибегаем к процедуре линеаризации, суть которой заключается в приравнивании выражений:

$$\bar{T}^4 - T_0^4 = \frac{T_c^4 - T_0^4}{T_c - T_0} (\bar{T} - T_0).$$

Это равенство тем лучше выполняется, чем ближе значения \bar{T} и T_c . При сделанном предположении уравнение теплообмена сведется к следующему виду:

$$C_p \rho \delta \left(\frac{dT}{dt} \right) = \alpha_{\Sigma} (T_c^* - \bar{T}),$$

где $\alpha_{\Sigma} = \alpha_1 + \alpha_2$; $\alpha_2 = \varepsilon \sigma \frac{T_c^4 - T_0^4}{T_c - T_0}$;

$$T_c^* = \frac{\alpha_1 T_c + \alpha_2 T_0}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

В результате решение для температуры тела примет вид:

$$\bar{T}(t) = T_0 + \frac{\alpha_1 (T_c - T_0)}{\alpha_{\Sigma}} (1 - e^{-\alpha_{\Sigma} t / (C_p \rho \delta)}). \quad (8)$$

Более просто решение получается с использованием выражения (7), если вспомнить, что $q_{\text{п}} = \alpha_1 \times (T_c - T_0)$.

Решение (8) примечательно тем, что дает предельное значение температуры тела \bar{T} при $t \rightarrow \infty$ в виде $\bar{T} \rightarrow T_0 + \alpha_1 (T_c - T_0) / \alpha_{\Sigma}$, которое отличается от предельного значения при отсутствии радиационных потерь, когда $\bar{T} \rightarrow T_c$. Случай с переменной температурой среды не должен вызывать затруднений с учетом (5).

Ситуация, когда термически тонкое тело отделяет друг от друга две среды с различными температурами и свойствами, сводится к (5) или (6), если принять

$$t_2 = \frac{C_p \rho \delta}{\alpha_1 + \alpha_2}; \quad T_c = \frac{\alpha_1 T_{c1} + \alpha_2 T_{c2}}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Точность результатов для термически тонкого тела зависит от строгости выполнения условия $Bi \ll 1$, которое для конвективного теплообмена сводится к условию

$$Nu \ll l\lambda / (\delta \lambda_c).$$

Для турбулентного режима при вынужденной конвекции в газовой среде это неравенство эквивалентно $\delta \ll 30 l\lambda / (Re^{0,8} \lambda_c)$.

При более интенсивном теплообмене, например при кипении, коэффициент теплоотдачи составляет несколько тысяч, и тогда условие $Bi \ll 1$ эквивалентно условию $\delta \ll \lambda / \alpha_{\text{кип}}$, которое для большинства строительных материалов равносильно требованию $\delta \ll 2,5 \cdot 10^{-4}$ м, для металлов — $\delta \ll 10^{-2}$ м. Для теплоизоляционных материалов это условие практически не выполнимо, т. е. $\delta \ll 10^{-5}$ м.

В случае радиационного теплообмена $\alpha \approx (50 \div 100) \text{ Вт} / (\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$, и тогда условие $Bi \ll 1$ равносильно $\delta \ll \lambda / \alpha_{\text{изл}}$, что соответствует $\delta \ll 2 \cdot 10^{-2}$ м для строительных материалов, $\delta \ll 1$ м — для металлов. Для теплоизоляционных материалов $\lambda = 0,05 \text{ Вт} / (\text{м} \cdot ^\circ\text{C})$; $\delta \ll 10^{-3}$ м.

2. Термически толстые конструкции

Случай термически толстого тела реализуется в течение времени, когда передний фронт теплового возмущения не успевает дойти до противоположной поверхности или не успевает встретиться с тепловым фронтом, распространяющимся с противоположной стороны.

Это условие формулируется как $t < (\delta^2 / \alpha) Fo^*$ (где Fo^* — предельное число Фурье; $Fo^* = 0,5$ — для одностороннего теплообмена, $Fo^* = 1$ — для двух-

стороннего. Иногда предельное значение Fo^* снижают до 0,3 и 0,6 соответственно).

В случае постоянства падающего теплового потока на поверхность термически толстого тела температуру поверхности можно определить по соотношению [15]:

$$\alpha_{\Sigma}(T_{\text{п}} - T_0) = q_{\text{п}} \left[1 - f\left(\frac{t}{t_3}\right) \right], \quad (9)$$

а величину теплового потока, идущего внутрь тела, — по формуле

$$q_{\text{в}} = q_{\text{п}} f(t/t_3), \quad (10)$$

где t_3 — характерное время изменения температуры обогреваемой поверхности; $t_3 = \lambda \rho C_p / \alpha_{\Sigma}^2$;

$$f\left(\frac{t}{t_3}\right) = \exp\left(\frac{t}{t_3}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{t}{t_3}\right)^{1/2}. \quad (10a)$$

Функция $\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x$, где $\operatorname{erf} x$ — интеграл ошибок [18–20].

Напомним, что в случае конвективного теплообмена со средой $q_{\text{п}} = \alpha(T_c - T_0)$, где α — коэффициент теплоотдачи, определяемый через число Nu. Суммарный коэффициент теплоотдачи $\alpha_{\Sigma} = \alpha + \alpha_{\text{изл}}$, если поверхность тела нагрета до такой температуры, что следует учитывать излучение от нее.

Если на тело первоначально падает поток, образуемый излучением и конвекцией по закону $q_{\text{п.конв}} = \alpha(T_c - T_0)$, то суммарный падающий поток $q_{\text{п}\Sigma} = q_{\text{п.изл}} + q_{\text{п.конв}}$, а α_{Σ} , как и прежде, будет равен $\alpha + \alpha_{\text{изл}}$.

Воспользовавшись представлениями функции $f(t/t_3)$ для случаев $t/t_3 \ll 1$ и $t/t_3 \gg 1$ [10], можно получить выражение для температуры поверхности и теплового потока, идущего внутрь тела, для этих предельных случаев:

$$\left. \begin{aligned} T_{\text{п}} - T_0 &= \frac{2q_{\text{п}}}{\alpha_{\Sigma} \sqrt{\pi}} \left(\frac{t}{t_3}\right)^{1/2}, \\ t/t_3 &\ll 1; \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$T_{\text{п}} - T_0 = \frac{2q_{\text{п}}}{\alpha_{\Sigma} \sqrt{\pi}} \left(\frac{t}{t_3}\right)^{1/2} \left[1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{t}{t_3}\right)^{1/2} \right]; \quad (11a)$$

$$\left. \begin{aligned} q_{\text{в}} &= q_{\text{п}} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{t}{t_3}\right)^{1/2} \right], \\ t/t_3 &< 1; \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$q_{\text{в}} = q_{\text{п}} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{t}{t_3}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{t}{t_3}\right)^{1/2} \right) \right]. \quad (12a)$$

Выражения (11a) и (12a) получены с точностью до t/t_3 , а (11) и (12) — только до членов $(t/t_3)^{1/2}$.

Соответственно, для случая $t/t_3 \gg 1$:

$$T_{\text{п}} - T_0 = \frac{q_{\text{п}}}{\alpha_{\Sigma}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi(t/t_3)}} \right); \quad (13)$$

$$q_{\text{в}} = q_{\text{п}} / \sqrt{\pi(t/t_3)}. \quad (13a)$$

В табл. 1 представлены результаты вычислений величины $[1 - f(t/t_3)]$, когда $f(t/t_3) = \exp(t/t_3) \times \operatorname{erfc}(t/t_3)^{1/2}$ (графа 2), по формуле (11) (графа 3), по выражению (11a) до значений $t/t_3 = 0,40$ (графа 4), по выражению (13) (графа 5), по выражениям (15) и (15a) (графа 6, $\gamma = 1$; графа 7, $\gamma = 1,4$).

В графе 8 для сравнения представлены значения $1 - A_1 \cos \mu_1 e^{-\mu_1^2 Fo}$ для $Fo = 0,5$, причем A_1 и μ_1 (учитывается только первый член ряда (16)) взяты из таблицы [3]. Содержание граф (9), (10), (11) понятно из табл. 1.

Решение по (15) получается следующим образом. Проинтегрируем уравнение (2) по x от 0 до $x_1(t)$ (где $x_1(t)$ — передовая граница зоны распространения температурного возмущения вглубь конструкции). В результате получим выражение

$$x_1 \frac{d\bar{T}}{dx_1} \frac{dx_1}{dt} = \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0}.$$

Сделав предположение, что существует связь между $\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = \gamma(t) \frac{d\bar{T}}{dx_1}$ и $\frac{d\bar{T}}{dx_1} = \frac{T_{\text{п}} - T_0}{x_1}$ (где $\gamma(t)$ — слабоменяющаяся функция времени), увидим, что последние выражения эквивалентны следующим:

$$x_1 = \sqrt{2\gamma(t)\alpha t}; \quad (14)$$

$$T_{\text{п}} - T_0 = \frac{q_{\text{п}}}{\alpha_{\Sigma}} \frac{\left(\frac{2}{\gamma(t)} \frac{t}{t_3}\right)^{1/2}}{1 + \left(\frac{2}{\gamma(t)} \frac{t}{t_3}\right)^{1/2}}; \quad (15)$$

$$q_{\text{в}} = \frac{q_{\text{п}}}{1 + \left(\frac{2}{\gamma(t)} \frac{t}{t_3}\right)^{1/2}}. \quad (15a)$$

Анализ табл. 1 показывает, что при малых значениях t/t_3 ($t/t_3 \ll 1$) выражение (11) сохраняет приемлемую точность до значений $t/t_3 \approx 10^{-2}$, при больших значениях ($t/t_3 > 8$) хорошую точность (~2%) дает выражение (13). Выражение (15) при $\gamma = 1,4$ дает хорошую точность в широком диапазоне изменения t/t_3 — от 0 до 0,4. Однако выражение (15) немного сложнее, чем (11). Результаты, полученные с помощью формулы (11), превышают точное значение при любых значениях t/t_3 , а с помощью выражения (15) с $\gamma = 1,4$ — при $t/t_3 \leq 9 \cdot 10^{-2}$. При $t/t_3 > 9 \cdot 10^{-2}$ вычисление по выражению (15) с $\gamma = 1,4$ постепенно дает заниженные значения, поэтому при $t/t_3 \geq 0,4$ уже следует переходить на вычисления по выражению (15) с $\gamma = 1$, а при $t/t_3 > 8$ — по выражению (13).

Выражение (14), по существу, дает возможность определить, является ли рассматриваемая конст-

Таблица 1. Результаты вычислений $1 - f(t/t_3)$ по различным формулам

t/t_3	$1 - \exp(t/t_3) \times \operatorname{erfc}(t/t_3)^{1/2}$	(11)	(11a)	(13)	(15), $\gamma = 1$	(15), $\gamma = 1,4$	$1 - A_1 \cos \mu_1 \times e^{-\mu_1^2 Fo}$	(20)–(24), $1,2 < Bi \leq 3$	(19), $Bi < 1,2$	(25), $Bi \geq 3$	Bi (Fo = 0,5)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$4 \cdot 10^{-4}$	0,022	0,022	0,022		0,027	0,023	0,022		0,0238		0,0283
10^{-2}	0,103	0,113	0,103		0,124	0,107	0,104		0,109		0,1414
$4 \cdot 10^{-2}$	0,191	0,226	0,186		0,220	0,193	0,198		0,200		0,2830
$9 \cdot 10^{-2}$	0,265	0,338	0,250		0,298	0,265	0,275		0,282		0,4243
0,16	0,329	0,451	0,290		0,361	0,324			0,346		0,5657
0,36	0,432	0,680	0,320		0,459	0,419			0,450		0,8485
0,49	0,500				0,497	0,460	0,493		0,490		0,9900
0,64	0,511				0,530	0,490	0,526		0,512		1,1314
0,81	0,560				0,560	0,520	0,559	0,560	0,530		1,2728
1	0,572			0,436	0,586	0,545	0,591	0,578	0,540		1,4140
1,44	0,620				0,630	0,590	0,642	0,634	0,747		1,7000
1,823	0,650				0,656	0,620	0,674	0,665			1,9090
2,25	0,680			0,620	0,680	0,643	0,705	0,691		0,640	2,1200
4	0,740			0,720	0,740	0,706	0,765	0,758		0,734	2,8300
9	0,840			0,800	0,810	0,783	0,820			0,830	4,2430
16	0,855			0,086	0,850	0,830	0,860			0,876	5,6520
25	0,887			0,890			0,910			0,903	7,0100

рукция термически толстым телом, т. е. применимы ли соотношения (11)–(15) к определению температуры поверхности и теплового потока внутрь конструкции. При $x_1 < \delta$ реализуется случай термически толстого тела.

В случае если стоит задача исследовать конструкцию толщиной δ из материала с коэффициентом температуропроводности α , время, в течение которого конструкция остается термически толстым телом, определяется из условия $t < \delta^2 / (2\alpha)$ или $Fo < 0,5$.

В табл. 2 представлены ориентировочные данные по величине t_3 для сочетания различных процессов и материалов. Табл. 2 может служить ориентиром при выборе соотношения, которым следует воспользоваться для определения температуры поверхности тела или величины теплового потока, перешедшего внутрь конструкции.

Пример

Определить температуру поверхности бетонной плиты толщиной $\delta = 2 \cdot 10^{-1}$ м к моменту времени, соответствующему $Fo = 0,01$, если $\alpha = 5,6 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $\rho = 2200$ кг/м³, $\lambda = 1,2$ Вт/(м·К).

Теплообмен происходит в результате:

1) конвекции, $\alpha = 60$ Вт/(м²·К), $T_c = 800$ К;

2) кипения жидкости с температурой кипения минус 42,7 °С, $\alpha = 6000$ Вт/(м²·К); начальная температура плиты $T_0 = 20$ °С.

Решение. Так как при указанных значениях числа Fo плиту можно считать термически толстым телом, воспользуемся равенством $t/t_3 = Fo Bi^2$.

При конвекции $Bi = \alpha\delta/\lambda = (60 \cdot 0,2)/1,2 = 10$, при кипении $Bi = (600 \cdot 0,2)/1,2 = 10^3$.

При кипении для данного значения числа Fo $t/t_3 > 10$, поэтому применима формула (13). Следовательно

$$T_n = T_0 + (T_c - T_0) \left[1 - 1/\sqrt{\pi Fo Bi^2} \right];$$

$$T_n = T_c - (T_c - T_0) \left(1/\sqrt{\pi Fo Bi^2} \right).$$

Вычисления в этом случае дают значение $T_n = -38,9$ °С.

При конвекции $t/t_3 = Fo Bi^2 = 1$, поэтому применима формула (15) с $\gamma = 1$:

$$\begin{aligned} T_n &= T_c - (T_c - T_0) \frac{\left(2 \frac{t}{t_3} \right)^{1/2}}{1 + \left(2 \frac{t}{t_3} \right)^{1/2}} = \\ &= 239 + (800 - 293) \frac{(2 \cdot 1)^{1/2}}{1 + (2 \cdot 1)^{1/2}} = \\ &= 293 + 507 \frac{1,414}{2,414} = 509 \text{ К.} \end{aligned}$$

Таблица 2. Значение величины t_3 для различных сочетаний материалов поверхностей и режимов теплообмена и времени достижения условия $Fo = 0,5$ для различных толщин δ

Материал	Процесс*	α , Вт/(м ² ·°С)	t_3 , с	Время t , с, при $Fo = 0,5$ и толщине пластины δ , м		
				10^{-3}	$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-1}$
Теплоизолятор ($\lambda \rho C_p$) = 5200 $\alpha = 3 \cdot 10^{-7}$ м ² /с	1	12	36	11,66	664	68400
	2	80	0,8			
	3	6000	$1,4 \cdot 10^{-4}$			
Дерево (сосна) ($\lambda \rho C_p$) = $2,1 \cdot 10^5$ $\alpha = 9,4 \cdot 10^{-8}$ м ² /с	1	12	1458	5,3	2120	212000
	2	80	32,8			
	3	6000	$5,8 \cdot 10^{-3}$			
Бетон, кирпич ($\lambda \rho C_p$) = $1,25 \cdot 10^6$ $\alpha = 5,8 \cdot 10^{-7}$ м ² /с	1	12	8680	0,86	344	34400
	2	80	195			
	3	6000	$3,4 \cdot 10^{-2}$			
Сталь ($\lambda \rho C_p$) = $1,9 \cdot 10^8$ $\alpha = 1,5 \cdot 10^{-5}$ м ² /с	1	12	137500	0,033	13,3	1333
	2	80	3094			
	3	6000	0,55			

* 1 — процесс конвекции в газовой среде с коэффициентом теплоотдачи при $\alpha = 12$ Вт/(м²·К); 2 — радиационный теплообмен; 3 — высокоинтенсивный процесс теплообмена при кипении.

3. Общий случай.

Пластина произвольной толщины

В общем случае для плоской пластины толщиной δ при граничных условиях

$$\alpha(T_c - T_n) = \left| \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} \quad \text{и} \quad \left| \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=\delta} = 0$$

и начальных условиях $T_{(x,0)} = T_0$ решение имеет вид бесконечного ряда [3]:

$$\frac{T_n - T_0}{T_c - T_0} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \mu_n \exp(-\mu_n^2 Fo); \quad (16)$$

$$A_n = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n}, \quad (17)$$

где μ_n — корни уравнения

$$\text{ctg} \mu_n = \mu_n / Bi. \quad (18)$$

Особенность корней уравнения (18) состоит в том, что эти корни возрастают с увеличением номера: при малых значениях Bi первый корень $\mu_1 \approx Bi^{1/2}$, а при больших значениях Bi — $\mu_1 \approx \pi/2$. Далее корни растут, увеличиваясь примерно на π .

Если учесть, что зависимость решения (16) от времени определяется множителем $\exp(-\mu_n^2 Fo)$, то с увеличением номера корня этот множитель значительно уменьшается. Кроме того, уменьшается с ростом номера корня и величина A_n , которая к тому же является знакопеременной. В результате отмеченных свойств величин μ_n и A_n ряд (16) быстро сходится, и при $Fo > 0,5$ учет только одного первого члена ряда обеспечивает точность для температуры поверхности 0,5 % [3]. При предыдущем рассмотрении термически толстых тел было установлено, что

для $Fo < 0,5$ при определении температуры поверхности, а следовательно, и потока тепла внутрь конструкции, справедливо использовать выражения для термически толстого тела.

Таким образом, для $Fo > 0,5$ достаточно взять только один первый член ряда. Однако значения μ_n и A_n зависят от Bi , поэтому необходимо пользоваться таблицами значений $\mu_n(Bi)$ и $A_n(Bi)$, что неудобно. Из [3] можно увидеть, что при изменении Bi от 0 до ∞ значения μ_1 изменяются от $Bi^{1/2}$ до $\sim \pi/2$, A_n — от 1 до 1,2732, а $\cos \mu_1$ — от 1 до 0.

Далее предпринимается попытка получить аналитические выражения для первого члена ряда при различных значениях Bi , а следовательно, и μ_1 .

Для случая $\mu_1 < 1$ при исследовании процедуры разложения величин $A_1 \cos \mu_1$ и $\text{tg} \mu_1$ получены следующие значения:

$$\mu_1^2 = Bi - (1/3)Bi^2;$$

$$A_1 \cos \mu_1 = \frac{1 - (2/3)Bi + (2/9)Bi^2}{1 - (1/3)Bi + (1/9)Bi^2}.$$

Таким образом, при $\mu_1 < 1$ решение (16) при $Fo > 0,5$ можно представить в виде:

$$\frac{T_n - T_0}{T_c - T_0} = 1 - \frac{1 - (2/3)Bi + (2/9)Bi^2}{1 - (1/3)Bi + (1/9)Bi^2} \times \exp(-Bi + (1/3)Bi^2)Fo. \quad (19)$$

При больших значениях Bi величина $\mu_1 \rightarrow \pi/2$, и если предположить, что $\pi/2 - \mu_1 = x \ll 1$, то из (18) следует $(Bi + 1)x + (x^3/3)Bi = \pi/2$.

Из приближенного решения этого уравнения следует:

$$x = x_0 \left(\frac{1 + \frac{2}{3} \frac{x_0^2}{Bi + 1}}{1 + \frac{x_0^2}{Bi + 1}} \right); \quad (20)$$

$$\mu_1 = \mu_{10} \left(\frac{1 + \frac{1}{3} \frac{x_0^2}{Bi}}{1 + \frac{1}{3} \frac{x_0^2}{Bi + 1}} \right), \quad (21)$$

где
$$x_0 = \frac{\pi}{2(Bi + 1)}; \quad (22)$$

$$\mu_{10} = \frac{\pi}{2} \frac{Bi}{Bi + 1}. \quad (23)$$

В результате первый член ряда выражения (16) будет иметь вид:

$$A_1 \cos \mu_1 e^{-\mu_1^2 Fo} = \frac{2x - \frac{4}{3}x^3}{\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}x^3} e^{-\mu_1^2 Fo}. \quad (24)$$

Для достаточно больших значений $Bi > 3$ последнее выражение упрощается и принимает вид:

$$A_1 \cos \mu_1 e^{-\mu_1^2 Fo} = \frac{2}{Bi + 1} e^{-\mu_1^2 Fo}. \quad (25)$$

В табл. 1 в графе 12 указано число Bi , соответствующее значению t/t_3 (графа 1) при условии, что $Fo = 0,5$, т. е. соответствует границе между термически толстым телом и условием применимости приближения только первого члена в выражении (16). Нетрудно заметить, что имеет место равенство для термически толстого тела $Fo \leq 0,5$:

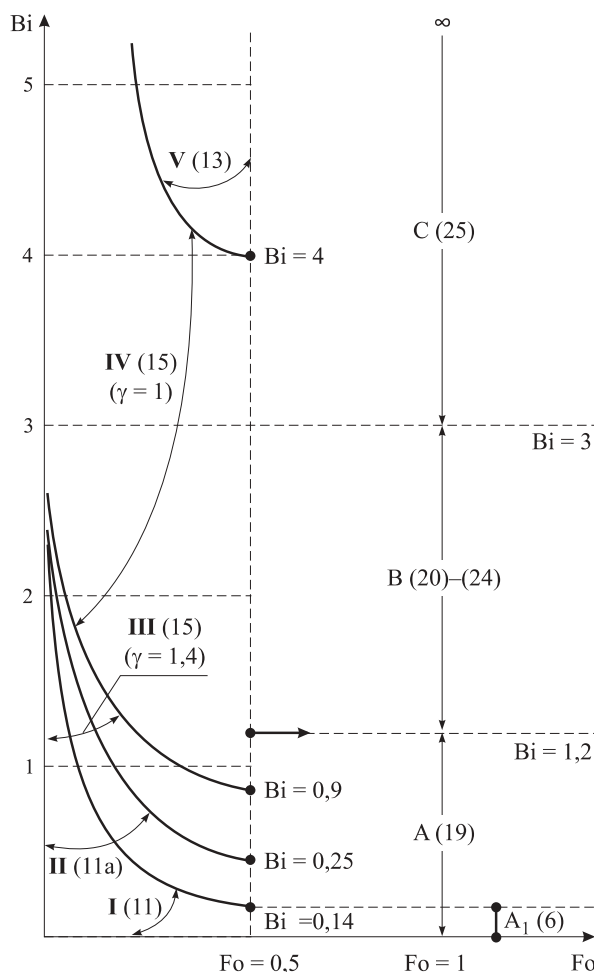
$$\frac{t}{t_3} = \frac{t\alpha^2 \delta^2 \varepsilon}{\lambda \rho C_p \delta^2 \varepsilon} = Fo Bi^2.$$

Таким образом, t/t_3 (см. графу 1 в табл. 1) можно рассматривать как рост времени, а значит, и Fo при постоянном значении Bi или, наоборот, как рост Bi при постоянной величине Fo . Поскольку мы взяли значение $Fo = 0,5$ как отделяющее условие использования только первого члена в выражении (16) при $Fo \geq 0,5$, а условие неприменимости этого приближения равносильно условию реализации ситуации термически толстого тела, то для $Fo \leq 0,5$ следует пользоваться выражениями (11)–(15) вместо нескольких членов ряда с данными, заимствованными из таблиц для каждого члена ряда.

Таким образом, в табл. 1 (графы 8–12) содержатся значения функции $(1 - f)$, где f — первый член ряда для случая $Fo \geq 0,5$. В табл. 1 представлены значения этой функции для $Fo = 0,5$. В графе (8) приведены данные, полученные с использованием таб-

личных значений μ_1 и A_1 , в графах 10 и 9 — данные, полученные для случая $Bi < 1,2$ (формула (19)) и $1,2 \leq Bi \leq 3$ (формулы (20)–(24)). Следует отметить, что для случая $Bi < 1,2$ используется приближение $\mu_1 < 1$, а для случая $1,2 \leq Bi \leq 3$ — условие $(\pi/2 - \mu_1) < 1$. В графе 11 приведены данные для случая $Bi \geq 3$, полученные по формуле (25), которая вытекает из (20)–(24), когда неравенство $\pi/2 - \mu_1 < 1$ выполняется более строго. В результате формулируется упрощенное правило определения температуры поверхности плоской конструкции, а значит, и теплового потока, идущего внутрь конструкции.

При $Fo < 0,5$ конструкция является термически толстым телом, и для $Bi \leq 0,9$ применимо соотношение (15) ($\gamma = 1$), а для $Bi \geq 4$ — соотношение (13). При $Fo \geq 0,5$ разбиение по диапазонам Bi на линии $Fo = 0,5$ изменяется. В случае малых Fo или Bi , т. е. при $t/t_3 < 10^{-2}$, удобно применять формулу (11), особенно для теоретического анализа процессов прогрета при малых временах прогрета — распространения горения, воспламенения от действия излучения. На рисунке в плоскости $Fo - Bi$ показаны зоны,



Различные области режимов теплообмена на плоской поверхности: I, II, III, IV, V — термически толстое тело, $Fo < 0,5$; A, B, C — $Fo > 0,5$; A_1 — термически тонкое тело

в которых применимы соответствующие результаты настоящей работы.

В части плоскости, соответствующей $Fo < 0,5$, пять зон. Зона I ограничена кривыми $Bi^2 Fo < 10^{-2}$. В этой зоне можно использовать выражение (11), которое является самым простым. Зона II включает в себя первую зону и ограничена сверху кривой $Bi^2 Fo = 9 \cdot 10^{-2}$. В этой зоне наиболее точные результаты дает выражение (11a). Зона III охватывает зоны I и II и ограничена сверху кривой $Bi^2 Fo = 0,405$. В этой зоне применимо соотношение (15) при $\gamma = 1,4$. Зона IV ограничена снизу зоной III, а сверху — кривой $Bi^2 Fo = 8$. В этой зоне наиболее удобно применять выражение (15) при $\gamma = 1$. Зона V ограничена снизу кривой $Bi^2 Fo = 8$, а сверху — не ограничена. Здесь наиболее удобно использовать выражение (13).

В части плоскости при $Fo > 0,5$ располагается зона A_1 , которая соответствует случаю термически

тонкого тела и ограничена условиями $Bi \leq 0,14$ и $Fo > 1$. Здесь применимо выражение (6). Зона A ограничена условиями $Bi \leq 1,2$ и $Fo > 0,5$, и в ней применимо выражение (19). Область B ограничена условиями $1,2 \leq Bi \leq 3$ и $Fo > 0,5$. Для вычисления температуры поверхности в этой зоне используются последовательно формулы (20)–(24). Область C ограничена условиями $Bi > 3$ и $Fo > 0,5$. Для определения температуры в ней используется выражение (25). Выражение (6) дает хорошие результаты и для случая $Fo < 1$.

Результаты работы могут быть использованы для определения как температур и величины тепловых потоков на поверхности тела, так и теплофизических характеристик тел (λ, ρ_0, C_p), если известны $q_{\text{п}}$ и $T_{\text{п}}$, а также для расчета защиты огнестойкости конструкций при пожаре [21].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. СП 23-101-2004. Проектирование тепловой защиты зданий. — Введ. 01.06.2004. — М.: ФГУП ЦПП, 2004.
2. *Rocket J. A., Milke J. A.* Conduction of heat in solids // SFPE Handbook of Fire Protection Engineering. — Massachusetts : NFPA, 2002. — P. 1-27-1-43.
3. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности : учеб. пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 1967. — 600 с.
4. *Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С.* Теплопередача : учеб. для вузов. — М.: Энергия, 1975. — 488 с.
5. *Варгафтик Н. Б.* Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. — М.: Наука, 1972. — 720 с.
6. *Федоров В. В., Бочаров Ю. Н., Барашков Р. Л. и др.* Методы расчета теплофизических свойств газов и жидкостей. — М.: Химия, 1974. — 248 с.
7. *Варнатц Ю., Маас У., Диббл Р.* Горение: физические и химические аспекты, моделирование, эксперименты, образование загрязняющих веществ / Пер. с англ. Г. Л. Агафонова; под. ред. П. А. Власова. — М.: Физматлит, 2003. — 352 с.
8. *Корольченко А. Я., Корольченко Д. А.* Пожаровзрывобезопасность веществ и материалов и средства их тушения : справочник: в 2 ч. — 2-е изд. перераб. и доп. — М.: Пожнаука, 2004. — Ч. I. — 713 с.
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. — М.: Наука, 1964. — 567 с.
10. *Михеев М. А., Михеева И. М.* Основы теплопередачи. — М.: Энергия, 1977. — 344 с.
11. *Кириллин В. А., Сычев В. В., Шейндлин А. Е.* Техническая термодинамика : учеб. для вузов. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Изд. дом МЭИ, 2008. — 469 с.
12. *Кудинов А. А.* Теплообмен : учеб. пособие. — М.: ИНФРА-М, 2012. — 375 с.
13. *Кутателадзе С. С., Боришанский В. Н.* Справочник по теплопередаче. — М.-Л.: Госэнергоиздат, 1958. — 414 с.
14. *Франк-Каменецкий Д. А.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике. — М.: Наука, 1987. — 492 с.
15. *Carlslaw H. S., Jaeger J. C.* Conduction of heat in solids. — Oxford, UK : Oxford University, 1959. — 510 с.
16. *Rohsenow W. M., Hartnett J. P., Ganic E. N.* Handbook of heat transfer fundamentals. Second Edition. — New York : McGraw-Hill, 1985. — 1440 p.
17. *Кошмаров Ю. А.* Прогнозирование опасных факторов пожара в помещении : учеб. пособие. — М.: Академия ГПС МВД России, 2000. — 118 с.
18. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1974. — 832 с.
19. *Nelson H. E., Forssell E. W.* Use of small-scale test data in hazard analysis // Fire Safety Science. — 1994. — Vol. 4. — P. 971-982. DOI: 10.3801/iafss.fss.4-971.
20. *Мышкис А. Д.* Математика для вузов. Специальные курсы. — М.: Наука, 1971. — 632 с.

21. Казиев М. М., Зубкова Е. В. Алгоритм защиты огнестойких светопрозрачных конструкций при пожаре // Пожары и чрезвычайные ситуации: предотвращение, ликвидация. — 2015. — № 3. — С. 71–77.

Материал поступил в редакцию 25 декабря 2015 г.

Для цитирования: Горев В. А., Фомина М. В. Упрощенный расчет теплообмена на плоских поверхностях // Пожаровзрывобезопасность. — 2016. — Т. 25, № 3. — С. 5–14. DOI: 10.18322/PVB.2016.25.03.5-14.

English

SIMPLIFIED CALCULATION OF HEAT ON A FLAT SURFACE

GOREV V. A., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Complex Safety in Construction, Moscow State University of Civil Engineering (Yaroslavskoye Shosse, 26, Moscow, 129337, Russian Federation; e-mail address: kafedrapb@yandex.ru)

FOMINA M. V., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Physics, Moscow State University of Civil Engineering (Yaroslavskoye Shosse, 26, Moscow, 129337, Russian Federation)

ABSTRACT

When building physical models of many processes are used information about the magnitude of the temperature of the structure surface and the heat flux into the design, you must have the foreseeable analytical expressions. Existing solutions to the heat equation for plates and semi-infinite space, hard understand as expressed through an infinite series of special functions or tabulated. Unfortunately, members of series are defined by the tables or graphes.

In the proposed work an attempt was made to get the final expressions to determine the surface temperature and the magnitude of the heat flow directed inside design.

These expressions must include values that define the decision problem — the initial and boundary conditions.

If the task addresses the following options:

- design is thermally thin body, when the Bio number is small ($Bi < 0.14$);
- design is thermally thick body, when the Fourier number $Fo < 0.5$, the condition means that the thermal perturbation has not reached the opposite border;
- body is not thermally thick, as $Fo > 0.5$, but is not thermally thin, because $Bi > 0.14$.

For a thermally thin body design temperature thickness has a constant value. For thermally thick body $Fo < 0.5$ there are defined three ranges of surface temperature determination. The first mode is determined by the product of $FoBi^2 < 0.01$ (of $Fo < 0.5$). The second mode is limited by the condition of $0.01 < FoBi^2 < 8$, a third mode is realized under condition $FoBi^2 < 8$.

As result there are derived the final expressions for determining surface temperature and heat flux inside the structure, which includes initial and boundary conditions, and does not require other additional information.

Keywords: plate; thermal conductivity; Bio number Bi ; Fourier number Fo ; while warming plate; while warming surface.

REFERENCES

1. *Set of rules 23-101–2004. Thermal performance design of buildings.* Moscow, Center of Design Production in Construction Publ., 2004 (in Russian).
2. Rocket J. A., Milke J. A. Conduction of heat in solids. *SFPE Handbook of Fire Protection Engineering.* Massachusetts, NFPA, 2002, pp. 1-27–1-43.
3. Lykov A. V. *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of thermal conductivity]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1967. 600 p.

4. Isachenko V. P., Osipova V. A., Sukomel A. S. *Teploperedacha* [Heat transfer]. Moscow, Energiya Publ., 1975. 488 p.
5. Vargaftik N. B. *Spravochnik po teplofizicheskim svoystvam gazov i zhidkostey* [Handbook of thermo-physical properties of gases and liquids]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 720 p.
6. Fedorov V. V., Bocharov Yu. N., Barashkov R. L. et al. *Metody rascheta teplofizicheskikh svoystv gazov i zhidkostey* [Methods of calculation of thermophysical properties of gases and liquids]. Moscow, Khimiya Publ., 1974. 248 p.
7. Warnatz J., Maas U., Dibble R. W. *Combustion: physical and chemical fundamental, modeling and simulations experiments, pollutant formation*. Berlin, Springer, 2001. 299 p. (Russ. ed.: Varnatts Yu., Maas U., Dibbl R. Goreniye. Fizicheskiye i khimicheskiye aspekty, modelirovaniye, eksperimenty, obrazovaniye zagryaznyayushchikh veshchestv. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003. 352 p.).
8. Korolchenko A. Ya., Korolchenko D. A. *Pozharovzryvoopasnost veshchestv i materialov i sredstva ikh tusheniya: spravochnik. 2-e izd.* [Fire and explosion hazard of substances and materials and their means of fighting. Reference book. 2nd ed.]. Moscow, Pozhnauka Publ., 2004. Part I, 713 p.
9. Landau L. D., Lifshits E. M. *Statisticheskaya fizika* [Statistical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1964. 567 p.
10. Mikheev M. A., Mikheeva I. M. *Osnovy teploperedachi* [Fundamentals of heat transfer]. Moscow, Energiya Publ., 1977. 344 p.
11. Kirillin V. A., Sychev V. V., Sheyndlin A. Ye. *Tekhnicheskaya termodinamika. 5-e izd.* [Technical thermodynamics. 5th ed.]. Moscow, Izdatelskiy dom MEI Publ., 2008. 469 p.
12. Kudinov A. A. *Teplomassoobmen* [Heat and mass transfer]. Moscow, INFRA-M Publ., 2012. 375 p.
13. Kutateladze S. S., Borishanskiy V. N. *Spravochnik po teploperedache* [Handbook of heat transfer]. Moscow – Leningrad, Gosenergoizdat Publ., 1958. 414 p.
14. Frank-Kamenetskiy D. A. *Diffuziya i teploperedacha v khimicheskoy kinetike* [Diffusion and heat transfer in chemical kinetics]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 492 p.
15. Carslaw H. S., Jaeger J. C. *Conduction of heat in solids*. Oxford, UK, Oxford University, 1959. 510 p.
16. Rohsenow W. M., Hartnett J. P., Ganic E. N. *Handbook of heat transfer fundamentals*. Second Edition. New York, McGraw-Hill, 1985. 1440 p.
17. Koshmarov Yu. A. *Prognozirovaniye opasnykh faktorov pozhara v pomeshchenii* [Forecasting of fire hazards in the case of indoor fire]. Moscow, State Fire Academy of Ministry of Interior of Russia Publ., 2000. 118 p.
18. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Mathematical handbook for scientists and engineers]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 832 p.
19. Nelson H. E., Forssell E. W. Use of small-scale test data in hazard analysis. *Fire Safety Science*, 1994, vol. 4, pp. 971–982. DOI: 10.3801/iafss.fss.4-971.
20. Myshkis A. D. *Matematika dlya vtuzov. Spetsialnyye kursy* [Mathematics for technical schools. Special courses]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 632 p.
21. Kaziev M. M., Zubkova E. V. Algoritm zashchity ognestoykikh svetoprozrachnykh konstruksiy pri pozhare [Protection algorithm for fire-resistant translucent structures in case of a fire]. *Pozhary i chezyvchaynyye situatsii: predotvrashcheniye, likvidatsiya — Fire and Emergencies: Prevention, Elimination*, 2015, no. 3, pp. 71–77.

For citation: Gorev V. A., Fomina M. V. Uproshchennyy raschet teploobmena na ploskikh poverkhnostyakh [Simplified calculation of heat on a flat surface]. *Pozharovzryvobezopasnost — Fire and Explosion Safety*, 2016, vol. 25, no. 3, pp. 5–14. DOI: 10.18322/PVB.2016.25.03.5-14.